UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK GENT
900000066936
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

ORDINIS GUELPHORUM ATQUE ORDINIS DANNEBROG EQUITE, BRITANNIARUM HANNOVERAEQUE REGI A CONSILIIS AULAE, OBSERVATORII REGII GOTTINGENSIS DIRECTORE, ASTRONOMIAE IN UNIVERSITATE GOTTINGENSI PROFESSORE, SOCIETATUM REGIARUM GOTTINGENSIS, LONDINENSIS, EDINBURGENSIS, HAVNIENSIS, ACADEMIARUM REGIARUM BEROLINENSIS, PARISINAE, NEAPOLITANAE, HOLMIENSIS, MONACHIENSIS, SOCIETATIS ITALICAE, CURONENSIS, ASTRONOMICAE LONDINENSIS, ACADEMIAE AMERICANAE ALIARUMQUE SOCIO.

GOTTINGAE

APUD HENRICUM DIETERICH.

1823.

Digitized by Google

Digitized by Google

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS.

PARS PRIOR.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA FEBR. 15. 1821.

I.

Quantacunque cura inſtituantur obſeruationes, rerum naturalium magnitudinem ſpectantes, ſemper tamen erroribus maioribus minoribusue obnoxiae manent. Errores obſeruationum plerumque non ſunt ſimplices, ſed e pluribus fontibus ſimul originem trahunt: horum fontium duas ſpecies probe diſtinguere oportet. Quaedam errorum cauſſae ita ſunt comparatae, vt ipſarum effectus in qualibet obſeruatione a circumſtantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipſam obſeruationem nullus nexus eſſentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares ſeu fortuiti vocantur, quatenusque illae circumſtantiae calculo ſubiici nequeunt, idem etiam de erroribus ipſis valet. Tales ſunt errores ab imperfectione ſenſuum prouenientes, nec non a cauſſis extraneis irregularibus, e. g. a motu tremulo aeris viſum tantillum turbante; plura quoque vitia inſtrumentorum vel optimorum huc trahenda ſunt, e. g. aſperitas partis interioris libellularum, defectus firmi-

Digitized by Google

tatis abſolutae etc. Contra aliae errorum cauſſae in omnibus obſeruationibus ad idem genus relatis natura ſua effectum vel abſolute conſtantem exſerunt, vel ſaltem talem, cuius magnitudo ſecundum legem determinatam vnica a circumſtantiis, quae tamquam eſſentialiter cum obſeruatione nexae ſpectantur, pendet. Huiusmodi errores conſtantes ſeu regulares appellantur.

Ceterum perſpicuum eſt, hanc diſtinctionem quodammodo relatiuam eſſe, et a ſenſu latiori vel arctiori, quo notio obſervationum ad idem genus pertinentium accipitur, pendere. E. g. vitia irregularia in diuiſione inſtrumentorum ad angulos menſurandos errorem conſtantem producunt, quoties tantummodo de obſeruatione anguli determinati indefinite repetenda ſermo eſt, ſiquidem hic ſemper eaedem diuiſiones vitioſae adhibentur: contra error ex illo fonte oriundus tamquam fortuitus ſpectari poteſt, quoties indefinite de angulis cuiusuis magnitudinis menſurandis agitur, ſiquidem tabula quantitatem erroris in ſingulis diuiſionibus exhibens non adeſt.

2.

Errorum regularium conſideratio proprie ab inſtituto noſtro excluditur. Scilicet obſeruatoris eſt, omnes cauſſas, quae errores conſtantes producere valent, ſedulo inueſtigare, et vel amovere, vel ſaltem earum rationem et magnitudinem ſummo ſtudio perſcrutari, vt effectus in quauis obſeruatione determinata aſſignari, adeoque haec ab illo liberari poſſit, quo pacto res eodem redit, ac ſi error omnino non affuiſſet. Longe vero diuerſa eſt ratio errorum irregularium, qui natura ſua calculo ſubiici nequeunt. Hos itaque in obſeruationibus quidem tolerare, ſed eorum effectum in quantitates ex obſeruationibus deriuandas per ſcitam harum combinationem quantum fieri poteſt extenuare oportet. Cui argumento grauiſſimo ſequentes diſquiſitiones dicatae ſunt.

Digitized by Google

3.

Errores obſeruationum ad idem genus pertinentium, qui a cauſſa ſimplici determinata oriuntur, per rei naturam certis *limitibus* ſunt circumſcripti, quos ſine dubio exacte aſſignare liceret, ſi indoles ipſius cauſſae *penitus* eſſet perſpecta. Pleraeque errorum fortuitorum cauſſae ita ſunt comparatae, vt ſecundum legem continuitatis omnes errores intra iſtos limites comprehenſi pro poſſibilibus haberi debeant, perfectaque cauſſae cognitio etiam doceret, vtrum omnes hi errores aequali facilitate gaudeant an inaequali, et quanta probabilitas relatiua, in caſu poſteriori, cuiuis errori tribuenda ſit. Eadem etiam reſpectu erroris totalis, e pluribus erroribus ſimplicibus conflati, valebunt, puta incluſus erit certis limitibus, (quorum alter aequalis erit aggregato omnium limitum ſuperiorum partialium, alter aggregato omnium limitum inferiorum); omnes errores intra hos limites poſſibiles quidem erunt, ſed prout quisque infinitis modis diuerſis ex erroribus partialibus componi poteſt, qui ipſi magis minusue probabiles ſunt, alii maiorem, alii minorem facilitatem tribuere debebimus, eruique poterit lex probabilitatis relatiuae, ſi leges errorum ſimplicium cognitae ſupponuntur, ſaluis difficultatibus analyticis in colligendis omnibus combinationibus.

Exſtant vtique quaedam errorum cauſſae, quae errores non ſecundum legem continuitatis progredientes, ſed discretos tantum, producere poſſunt, quales ſunt errores diuiſionis inſtrumentorum, (ſiquidem illos erroribus fortuitis annumerare placet): diuiſionum enim multitudo in quouis inſtrumento determinato eſt finita. Manifeſto autem, hoc non obſtante, ſi modo non omnes errorum cauſſae errores discretos producant, complexus omnium errorum totalium poſſibilium conſtituet ſeriem ſecundum legem continuitatis progredientem, ſiue plures eiusmodi ſeries interruptas, ſi forte, omnibus erroribus discretis poſſibilibus ſecundum magnitudinem ordinatis, vna alteraue differentia inter binos terminos

Digitized by Google

proximos maior euadat, quam differentia inter limites errorum totalium, quatenus e ſolis erroribus continuis demanant. Sed in praxi caſus poſterior vix vmquam locum habebit, niſi diuiſio vitiis craſſioribus laboret.

4.

Deſignando facilitatem relatiuam erroris totalis x, in determinato obſeruationum genere, per characteriſticam φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, probabilitatem erroris inter limites infinite proximos x et $x + dx$ eſſe $= \varphi x . dx$. Vix, ac ne vix quidem, vmquam in praxi poſſibile erit, hanc functionem a priori aſſignare: nihilominus plura generalia eam ſpectantia ſtabiliri poſſunt, quae deinceps proferemus. Obuium eſt, functionem φx eatenus ad functiones discontinuas referendam eſſe, quod pro omnibus valoribus ipſius x, extra limites errorum poſſibilium iacentibus eſſe debet $= 0$; intra hos limites vero vbique valorem poſitiuum nanciscetur (omittendo caſum, de quo in fine art. praec. locuti ſumus). In plerisque caſibus errores poſitiuos et negatiuos eiusdem magnitudinis aeque faciles ſupponere licebit, quo pacto erit $\varphi(-x) = \varphi x$. Porro quum errores leuiores facilius committantur quam graviores, plerumque valor ipſius φx erit maximus pro $x = 0$, continuoque decreſcet, dum x augetur.

Generaliter autem valor integralis $\int \varphi x . dx$, ab $x = a$ vsque ad $x = b$ extenſi exprimet probabilitatem, quod error aliquis nondum cognitus iaceat inter limites a et b. Valor itaque iſtius integralis a limite inferiori omnium errorum poſſibilium vsque ad limitem ſuperiorem extenſi ſemper erit $= 1$. Et quum φx pro omnibus valoribus ipſius x extra hos limites iacentibus ſemper ſit $= 0$, manifeſto etiam

valor integralis $\int \varphi x . dx$ *ab* $x = -\infty$ *vsque ad* $x = +\infty$ *extenſi ſemper fit* $= 1$.

Digitized by Google

5.

Conſideremus porro integrale $\int x \varphi x \cdot dx$ inter eosdem limites, cuius valorem ſtatuemus $= k$. Si omnes errorum cauſſae ſimplices ita ſunt comparatae, vt nulla adſit ratio, cur errorum aequalium ſed ſignis oppoſitis affectorum alter facilius producatur quam alter, hoc etiam reſpectu erroris totalis valebit, ſiue erit $\varphi(-x) = \varphi x$, et proin neceſſario $k = 0$. Hinc colligimus, quoties k non euaneſcat ſed e. g. ſit quantitas poſitiua, neceſſario adeſſe debere vnam alteramue errorum cauſſam, quae vel errores poſitiuos tantum producere poſſit, vel certe poſitiuos facilius quam negatiuos. Haecce quantitas k, quae reuera eſt medium omnium errorum poſſibilium, ſeu valor medius ipſius x, commode dici poteſt erroris pars conſtans. Ceterum facile probari poteſt, partem conſtantem erroris totalis aequalem eſſe aggregato partium conſtantium, quas continent errores e ſingulis cauſſis ſimplicibus prodeuntes. Quodſi quantitas k nota ſupponitur, a quauis obſeruatione reſecatur, errorque obſeruationis ita correctae deſignatur per x', ipſiusque probabilitas per $\varphi' x'$, erit $x' = x - k$, $\varphi' x' = \varphi x$ ac proin $\int x' \varphi' x' \cdot dx' = \int x \varphi x \cdot dx - \int k \varphi x \cdot dx = k - k = 0$, i. e. errores obſeruationum correctarum partem conſtantem non habebunt, quod et per ſe clarum eſt.

6.

Perinde vt integrale $\int x \varphi x \cdot dx$, ſeu valor medius ipſius x, erroris conſtantis vel abſentiam vel praeſentiam et magnitudinem docet, integrale

$$\int xx \varphi x \cdot dx$$

ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extenſum (ſeu valor medius quadrati xx) aptiſſimum videtur ad incertitudinem obſeruationum in genere definiendam et dimetiendam, ita vt e duobus obſeruationum ſyſtematibus, quae quoad errorum facilitatem inter ſe differunt, eae praeciſione praeſtare cenſeantur, in quibus inte-

grale $\int xx\Phi x . dx$ valorem minorem obtinet. Quodſi quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente neceſſitate, electam eſſe obiiciat, lubenter aſſentiemur. Quippe quaeſtio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumſcribi niſi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. Determinatio alicuius quantitatis per obſeruationem errori maiori minoriue obnoxiam, haud inepte comparatur ludo, in quo ſolae iacturae, lucra nulla, dum quilibet error metuendus iacturae affinis eſt. Talis ludi dispendium aeſtimatur e iactura probabili, puta ex aggregato productorum ſingularum iacturarum poſſibilium in probabilitates reſpectiuas. Quantae vero iacturae quemlibet obſeruationis errorem aequiparare conueniat, neutiquam per ſe clarum eſt; quin potius haec determinatio aliqua ex parte ab arbitrio noſtro pendet Iacturam ipſi errori aequalem ſtatuere manifeſto non licet; ſi enim errores poſitiui pro iacturis acciperentur, negatiui lucra repraeſentare deberent. Magnitudo iacturae potius per talem erroris functionem exprimi debet, quae natura ſua ſemper ſit poſitiua. Qualium functionum quum varietas ſit infinita, ſimpliciſſima, quae hac proprietate gaudet, prae ceteris eligenda videtur, quae abeque lite eſt quadratum; hoc pacto principium ſupra prolatum prodit.

Ill. Laplace ſimili quidem modo rem conſiderauit, ſed errorem ipſum ſemper poſitiue acceptum tamquam iacturae menſuram adoptauit. At ni fallimur haecce ratio ſaltem non minus arbitraria eſt quam noſtra: vtrum enim error duplex aeque tolerabilis putetur quam ſimplex bis repetitus, an aegrius, et proin vtrum magis conueniat, errori duplici momentum duplex tantum, an maius, tribuere, quaeſtio eſt neque per ſe clara, neque demonſtrationibus mathematicis decidenda, ſed libero tantum arbitrio remittenda. Praeterea negari non poteſt, iſta ratione continuitatem laedi: et propter hanc ipſam cauſſam modus ille

tractationi analyticae magis refragatur, dum ea, ad quae principium noſtrum perducit, mira tum ſimplicitate tum generalitate commendantur.

7.

Statuendo valorem integralis $\int xx\varphi x . dx$ ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extenſi $= mm$, quantitatem m vocabimus *errorem medium metuendum*, ſiue ſimpliciter *errorem medium* obſervationum, quarum errores indefiniti x habent probabilitatem relatiuam φx. Denominationem illam non ad obſeruationes immediatas limitabimus, ſed etiam ad determinationes qualescunque ex obſeruationibus derivatas extendemus. Probe autem cauendum eſt, ne error medius confundatur cum medio arithmetico omnium errorum, de quo in art. 5. locuti ſumus.

Vbi plura obſeruationum genera, ſeu plures determinationes ex obſeruationibus petitae, quibus haud eadem praecilio concedenda eſt, comparantur, *pondus* earum relatiuum nobis erit quantitas ipſi mm reciproce proportionalis, dum *praecilio* ſimpliciter ipſi m reciproce proportionalis habetur. Quo igitur pondus per numerum exprimi poſſit, pondus certi obſeruationum generis pro vnitate acceptum eſſe debet.

8.

Si obſeruationum errores partem conſtantem implicant, hanc auferendo error medius minuitur, pondus et praecilio augentur. Retinendo ſigna art. 6, deſignandoque per m' errorem medium obſeruationum correctarum, erit

$$m'm' = \int x'x'\varphi' x' . dx' = \int (x-k)^2 \varphi x \; dx = \int xx\varphi x . dx$$
$$- 2k\int x\varphi x . dx + kk\int \varphi x . dx = mm - 2kk + kk = mm - kk.$$

Si autem loco partis conſtantis veri k quantitas alia l ab obſervationibus ablata eſſet, quadratum erroris medii noui euaderet $= mm - 2kl + ll = m'm' + (l-k)^2$.

9.

Denotante λ coëfficientem determinatum, atque μ valorem integralis $\int \varphi x . dx$ ab $x = -\lambda m$ vsque ad $x = +\lambda m$, erit μ probabilitas, quod error alicuius obseruationis sit minor quam λm (sine respectu signi), nec non $1 - \mu$ probabilitas erroris maioris quam λm. Si itaque valor $\mu = \frac{1}{2}$ respondet valori $\lambda m = \rho$, error aeque facile infra ρ quam supra ρ cadere potest, quocirca ρ commode dici potest error *probabilis*. Relatio quantitatum λ, μ manifesto pendet ab indole functionis φx, quae plerumque incognita est. Operae itaque pretium erit, istam relationem pro quibusdam casibus specialibus propius considerare.

I. Si limites omnium errorum possibilium sunt $-a$ et $+a$, omnesque errores intra hos limites aeque probabiles, erit φx inter limites $x = -a$ et $x = +a$ constans, et proin $= \frac{1}{2a}$. Hinc $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, nec non $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ non maior quam $\sqrt{3}$; denique $\rho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\, m$, probabilitasque, quod error prodeat errore medio non maior, erit $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Si vt antea $-a$ et $+a$ sunt errorum possibilium limites, errorumque ipsorum probabilitas inde ab errore o vtrimque in progressione arithmetica decrescere supponitur, erit

$$\varphi x = \frac{a - x}{aa}, \text{ pro valoribus ipsius } x \text{ inter o et } +a$$

$$\varphi x = \frac{a + x}{aa}, \text{ pro valoribus ipsius } x \text{ inter o et } -a.$$

Hinc deducitur $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda\lambda$, quamdiu λ est inter o et $\sqrt{6}$, denique $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{(6 - 6\mu)}$, quamdiu μ inter o et 1, et proin

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\, m$$

Probabilitas erroris medium non superantis erit in hoc casu $= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} = 0{,}6498099$.

III.

III. Si functionem φx proportionalem ſtatuimus huic $e^{-\frac{xx}{hh}}$ (quod quidem in rerum natura proxime tantum verum eſſe poteſt), eſſe debebit

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{h\sqrt{\pi}}$$

denotante π ſemiperipheriam circuli pro radio 1, vnde porro deducimus

$$m = h\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(V. *Diſquiſ. generales circa ſeriem infinitam* etc. art. 28.). Porro ſi valor integralis

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int e^{-zz}\, dz$$

a $z = 0$ inchoati denotatur per Θz, erit

$$\mu = \Theta(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Tabula ſequens exhibet aliquot valores huius quantitatis:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1.0000000	0.6826895
1,0364334	0,7
1.2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3.2918301	0.999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quanquam relatio inter λ et μ ab indole functionis φx pendet, tamen quaedam generalia ſtabilire licet. Scilicet qualiscunque ſit haec functio, ſi modo ita eſt comparata, vt ipſius valor, creſcente valore abſoluto ipſius x, ſemper decreſcat, vel ſaltem non creſcat, certo erit

λ minor vel ſaltem non maior quam $\mu\sqrt{3}$, quoties μ eſt minor quam $\frac{2}{3}$;

λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$, quoties μ eſt maior quam $\frac{2}{3}$

Pro $\mu=\frac{2}{3}$ vterque limes coincidit, puta λ nequit eſſe maior quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

Vt hoc inſigne theorema demonſtremus, denotemus per y valorem integralis $\int\varphi z.\mathrm{d}z$ a $z=-x$ vsque ad $z=+x$ extenſi, quo pacto y erit probabilitas, quod error aliquis contentus ſit intra limites $-x$ et $+x$. Porro ſtatuamus

$$x=\psi y,\ \mathrm{d}\psi y=\psi' y.\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}\psi' y=\psi'' y.\mathrm{d}y$$

Erit itaque $\psi 0=0$, nec non

$$\psi' y=\frac{1}{\varphi x+\varphi(-x)},$$

quare per hyp. $\psi' y$ ab $y=0$ vsque ad $y=1$ ſemper creſcet, ſaltem nullibi decreſcet, ſiue, quod idem eſt, valor ipſius $\psi'' y$ ſemper erit poſitiuus, vel ſaltem non negatiuus. Porro habemus $\mathrm{d}.y\psi' y=\psi' y.\mathrm{d}y+y\psi'' y.\mathrm{d}y$, adeoque

$$y\psi' y-\psi y=\int y\psi'' y.\mathrm{d}y$$

integratione ab $y=0$ inchoata. Valor expreſſionis $y\psi' y-\psi y$ itaque ſemper erit quantitas poſitiua, ſaltem non negatiua, adeoque

$$1-\frac{\psi y}{y\psi' y}$$

quantitas poſitiua vnitate minor. Sit f eius valor pro $y=\mu$, i. e. quum habeatur $\psi\mu=\lambda m$, ſit

$$f=1-\frac{\lambda m}{\mu\psi'\mu}\ \text{ſiue}\ \psi'\mu=\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}$$

His ita praeparatis, conſideremus functionem ipſius y hanc

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y-\mu f)$$

quam ſtatuemus $=Fy$, nec non $\mathrm{d}Fy=F'y.\mathrm{d}y$. Perſpicuum eſt fieri

$$F\mu = \lambda m = \psi\mu$$

$$F'\mu = \frac{\lambda\mu}{(1 \quad f)\mu} = \psi'\mu$$

Quare quum $\psi' y$, aucta ipſa y, continuo creſcat (ſaltem non decreſcat, quod ſemper ſubintelligendum), $F'y$ vero conſtans ſit, differentia $\psi' y - F' y = \frac{\mathrm{d}(\psi y - Fy)}{\mathrm{d}y}$ erit poſitiua pro valoribus ipſius y maioribus quam μ, negatiua pro minoribus. Hinc facile colligitur, $\psi y - Fy$ ſemper eſſe quantitatem poſitiuam, adeoque ψy ſemper erit abſolute maior, ſaltem non minor, quam Fy, certe quamdiu valor ipſius Fy eſt poſitiuus, i. e. ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$. Hinc valor integralis $\int (Fy)^2 \mathrm{d}y$ ab $y = \mu f$ vsque ad $y = 1$ erit minor valore integralis $\int (\psi y)^2 \mathrm{d}y$ inter eosdem limites, adeoque a potiori minor valore huius integralis ab $y = 0$ vsque ad $y = 1$, qui fit $= mm$. At valor integralis prioris inuenitur

$$= \frac{\lambda\lambda mm(1 - \mu f)^3}{3\mu\mu(1 - f)^2}$$

vnde colligimus, $\lambda\lambda$ eſſe minorem quam $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, vbi f eſt quantitas inter 0 et 1 iacens. Iam valor fractionis $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, cuius differentiale, ſi $= f$ tamquam quantitas variabilis conſideratur, fit $=$

$$-\frac{3\mu\mu(1-f)}{(1-\mu f)^4} \cdot (2 - 3\mu + \mu f)\,\mathrm{d}f$$

continuo decreſcit, dum f a valore 0 vsque ad valorem 1 tranſit, quoties μ minor eſt quam $\frac{2}{3}$, adeoque valor maximus poſſibilis erit is qui valori $f = 0$ reſpondet, puta $= 3\mu\mu$, ita vt in hoc caſu λ certo fiat minor vel non maior quam $\mu\sqrt{3}$. *Q. E. P.* Contra quoties μ maior eſt quam $\frac{2}{3}$, valor iſtius fractionis erit maximus pro $2 - 3\mu + \mu f = 0$, i. e. pro $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, vnde ille fit

$= \frac{4}{9(1-\mu)}$, adeoque in hoc caſu λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$. *Q. E. S.*

Ita e. g. pro $\mu = \frac{1}{2}$ certo λ nequit eſſe maior quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, i. e. error probabilis ſuperare nequit limitem $0{,}8660254\,m$, cui in exemplo primo art. 9. aequalis inuentus eſt. Porro facile e theoremate noſtro concluditur, μ non eſſe minorem quam $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ minor ſit quam $\sqrt{\frac{3}{4}}$, contra μ non eſſe minorem quam $1 - \frac{4}{9\lambda\lambda}$, pro valore ipſius λ maiori quam $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

II.

Quum plura problemata infra tractanda etiam cum valore integralis $\int x^4 \varphi x \cdot \mathrm{d}x$ nexa ſint, operae pretium erit, eum pro quibusdam caſibus ſpecialibus euoluere. Denotabimus valorem huius integralis ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$ extenſi per n^4.

I. Pro $\varphi x = \frac{1}{2a}$, quatenus x inter $-a$ et $+a$ continetur, habemus $n^4 = \frac{9}{5}a^4 = \frac{9}{5}m^4$.

II. In caſu ſecundo art. 6, vbi $\varphi x = \frac{a \mp x}{aa}$, pro valoribus ipſius x inter 0 et $\pm a$, ſit $n^4 = \frac{1}{15}a^4 = \frac{12}{5}m^4$.

III. In caſu tertio vbi

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{a\sqrt{\pi}}$$

inuenitur per ea, quae in commentatione ſupra citata exponuntur, $n^4 = \frac{3}{4}h^4 = 3m^4$.

Ceterum demonſtrari poteſt, valorem ipſius $\frac{n^4}{m^4}$ certo non eſſe minorem quam $\frac{9}{5}$, ſi modo ſuppoſitio art. praec. locum habeat.

12.

Denotantibus x, x', x'' etc. indefinite errores obseruationum eiusdem generis ab inuicem independentes, quorum probabilitates relatiuas exprimit praefixa characteristica φ; nec non y functionem datam rationalem indeterminatarum x, x', x'' etc.: integrale multiplex (I)

$$\int \varphi x . \varphi' x . \varphi'' x \ldots . dx . dx' . dx'' \ldots .$$

extenſum per omnes valores indeterminatarum x, x', x'', pro quibus valor ipſius y cadit intra limites datos o et η, exprimet probabilitatem valoris ipſius y indefinite intra o et η ſiti. Manifeſto hoc integrale erit functio ipſius η, cuius differentiale ſtatuemus $= \psi\eta . d\eta$, ita vt integrale ipſum fiat aequale integrali $\int \psi\eta . d\eta$ ab $\eta = o$ incepto. Hoc pacto ſimul characteriſtica $\psi\eta$ probabilitatem relatiuam cuiusuis valoris ipſius y exprimere cenſenda eſt. Quum x conſiderari poſſit tamquam functio indeterminatarum y, x', x'' etc., quam ſtatuemus

$$= f(y, x', x'' \ldots .)$$

integrale (I) fiet

$$= \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{df(y, x', x'' \ldots .)}{dy} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . dy . dx' . dx'' \ldots .$$

vbi y extendi debet ab $y = o$ vsque ad $y = \eta$, indeterminatae reliquae vero per omnes valores, quibus reſpondet valor realis ipſius $f(y, x', x'' \ldots .)$. Hinc colligitur

$$\psi y = \int \varphi \, f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{df(y, x', x'' \ldots .)}{dy} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . dx' . dx'' \ldots .$$

integratione, in qua y tamquam conſtans conſiderari debet, extenſa per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., qui ipſi $f(y, x', x'' \ldots .)$ valorem realem conciliant.

13.

Ad hanc integrationem reipſa exſequendam cognitio functionis φ requireretur, quae plerumque incognita eſt: quinadeo,

etiamsi haec functio cognita esset, in plerisque casibus integratio vires analyseos superaret. Quae quum ita sint, probabilitatem quidem singulorum valorum ipsius y assignare non poterimus: at secus res se habebit, si tantummodo desideratur valor medius ipsius y, qui oritur ex integratione $\int y \psi y . dy$ per omnes valores ipsius y, quos quidem assequi potest, extensa. Et quum manifesto pro omnibus valoribus, quos y assequi nequit, vel per naturam functionis quam exprimit (e. g. pro negatiuis, si esset $y = xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}$), vel ideo quod erroribus ipsis x, x', x'' etc. certi limites sunt positi, statuere oporteat $\psi y = 0$, manifesto res perinde se habebit, si integratio illa extendatur per omnes valores reales ipsius y, puta ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$. Iam integrale $\int y \psi y . dy$ inter limites determinatos, puta ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$ sumtum aequale est integrali

$$\int y \Phi . f(y, x', x'' \ldots) \frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy} . \Phi x' . \Phi x'' \ldots . dy . dx' . dx'' \ldots$$

integratione extensa ab $y = \eta$ vsque ad $y = \eta'$, atque per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc. quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots)$, siue quod idem est, valori integralis

$$\int y \Phi x . \Phi x' . \Phi x'' \ldots . dx . dx' . dx'' \ldots$$

adhibendo in hac integratione pro y eius valorem per x, x', x'' etc. expressum, extendendoque eam per omnes harum indeterminatarum valores, quibus respondet valor ipsius y inter η et η' situs. Hinc colligimus, integrale $\int y \psi y . dy$ per omnes valores ipsius y, ab $y = -\infty$ vsque ad $y = +\infty$ extensum obtineri ex integratione

$$\int y \Phi x . \Phi x' . \Phi x'' \ldots . dx . dx' . dx'' \ldots$$

per omnes valores reales ipsarum x, x', x'' etc. extensa, puta ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.

14.

Reducta itaque functione y ad formam aggregati talium partium

$$A x^{\alpha} x'^{\beta} x''^{\gamma} \ldots .$$

valor integralis $\int y \psi y \,.\, dy$ per omnes valores ipsius y extensi, seu valor medius ipsius y, aequalis erit aggregato partium

$$A \times \int x^{\alpha} \varphi x \,.\, dx \times \int x'^{\beta} \varphi x' \,.\, dx' \times \int x''^{\gamma} \varphi x'' \,.\, dx'' \ldots .$$

vbi integrationes extendendae sunt ab $x = -\infty$ vsque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ vsque ad $x' = +\infty$ etc.; siue quod eodem redit, aggregato partium quae oriuntur, dum pro singulis potestatibus x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ipsarum valores medii substituuntur, cuius theorematis grauissimi veritas etiam ex aliis considerationibus facile deriuari potuisset.

15.

Applicemus ea, quae in art. praec. exposuimus, ad casum specialem, vbi

$$y = \frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

denotante σ multitudinem partium in numeratore. Valor medius ipsius y hic illico inuenitur $= mm$, accipiendo characterem m in eadem significatione vt supra. Valor verus quidem ipsius y in casu determinato maior minorue euadere potest medio, perinde ac valor verus termini simplicis xx: sed probabilitas quod valor fortuitus ipsius y a medio mm haud sensibiliter aberret, continuo magis ad certitudinem appropinquabit crescente multitudine σ. Quod quo clarius eluceat, quum probabilitatem ipsam exacte determinare non sit in potestate, inuestigemus errorem medium metuendum, dum supponimus $y = mm$. Manifestio per principia art. 6. hic error erit radix quadrata valoris medii functionis

$$\left(\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{\sigma} - mm \right)^2$$

ad quem eruendum sufficit obseruare, valorem medium termini talis $\frac{x^4}{\sigma\sigma}$ esse $= \frac{n^4}{\sigma\sigma}$ (vtendo charactere n in significatione art. 11.), valorem medium autem termini talis $\frac{2xx'x'}{\sigma\sigma}$ fieri $= \frac{2m^4}{\sigma\sigma}$, vnde

facillime deducitur valor medius iſtius functionis

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

Hinc discimus, ſi copia ſatis magna errorum fortuitorum ab inuicem independentium x, x', x' etc. in promtu ſit, magna certitudine inde peti poſſe valorem approximatum ipſius m per formulam

$$m = \sqrt{\frac{(xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.})}{\sigma}}$$

erroremque medium in hac determinatione metuendum, reſpectu quadrati mm, eſſe

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

Ceterum, quum poſterior formula implicet quantitatem n, ſi id tantum agitur, vt idea qualiscunque de gradu praeciſionis iſtius determinationis formari poſſit, ſufficiet, aliquam hypotheſin reſpectu functionis φ amplecti. E. g. in hypotheſi tertia art. 9, 11. iſte error fit $= mm\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Quod ſi minus arridet, valor approximatus ipſius n^4 ex ipſis erroribus adiumento formulae

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

peti poterit. Generaliter autem affirmare poſſumus, praeciſionem duplicatam in iſta determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam, ſiue pondus determinationis ipſi multitudini σ eſſe proportionale.

Prorſus ſimili modo, ſi obſeruationum errores partem conſtantem inuoluunt, huius valor approximatus eo tutius e medio arithmetico multorum errorum colligi poterit, quo maior horum multitudo fuerit. Et quidem error medius in hac determinatione metuendus exprimetur per

$$\sqrt{mm}$$

$$\sqrt{\frac{mm - kk}{\sigma}}$$

ſi k deſignat partem conſtantem ipſam atque m errorem medium obſeruationum parte conſtante nondum purgatarum, ſiue ſimpliciter per $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, ſi m denotat errorem medium obſeruationum a parte conſtante liberatarum (v. art. 8.).

16.

In artt. 12—15. ſuppoſuimus, errores x, x', x'' etc. ad idem obſeruationum genus pertinere, ita vt ſingulorum probabilitates per eandem functionem exprimantur. Sed ſponte patet, diſquiſitionem generalem artt. 12 — 14 aeque facile ad caſum generaliorem extendi, vbi probabilitates errorum x, x', x'' etc. per functiones diuerſas φx, $\varphi' x'$, $\varphi'' x''$ etc. exprimantur, i. e. vbi errores illi pertineant ad obſeruationes praeciſionis ſeu incertitudinis diuerſae. Supponamus, x eſſe errorem obſeruationis talis, cuius error medius metuendus ſit $= m$; nec non x', x'' etc. eſſe errores aliarum obſeruationum, quarum errores medii metuendi reſp. ſint m', m'' etc. Tunc valor medius aggregati $xx + x'x' + x''x'' +$ etc. erit $mm + m'm' + m''m'' +$ etc. Iam ſi aliunde conſtat, quantitates m, m', m'' etc. eſſe in ratione data, puta numeris 1, μ', μ'' etc. reſp. proportionales, valor medius expreſſionis

$$\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

erit $= mm$. Si vero valorem eiusdem expreſſionis determinatum, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipſi mm aequalem ponimus, error medius, cui haec determinatio obnoxia manet, ſimili ratione vt in art. praec. inuenitur

$$= \frac{\sqrt{(n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

vbi n', n'' etc. reſpectu obſeruationum, ad quas pertinent errores

x', x'' etc., idem denotare ſupponuntur, atque n reſpectu obſervationis primae. Quodſi itaque numeros n, n', n'' etc. ipſis m, m', m'' etc. proportionales ſupponere licet, error ille metuendus medius fit

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4)} \cdot \sqrt{(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

At haecce ratio, valorem approximatum ipſius m determinandi, non eſt ea, quae maxime ad rem facit. Quod quo clarius oſtendamus, conſideremus expreſſionem generaliorem

$$y = \frac{xx + \alpha' x'x' + \alpha'' x''x'' + \text{etc.}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

cuius valor medius quoque erit $= mm$, quomodocunque eligantur coëfficientes α', α'' etc. Error autem medius metuendus, dum valorem determinatum ipſius y, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipſi mm aequalem ſupponimus, inuenitur per principia ſupra tradita

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4 + \alpha'\alpha'(n'^4 - m'^4) + \alpha''\alpha''(n''^4 - m''^4) + \text{etc.})}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

Vt hic error medius fiat quam minimus, ſtatuere oportebit

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \cdot \mu'\mu'$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \cdot \mu''\mu'' \text{ etc.}$$

Manifeſto hi valores euolui nequeunt, niſi inſuper ratio quantitatum n, n', n'' etc. ad m, m', m'' etc aliunde nota fuerit; qua cognitione exacta deficiente, ſaltem tutiſſimum videtur *), illas his proportionales ſupponere (v. art. 11), vnde prodeunt valores

*) Scilicet cognitionem quantitatum μ', μ'' etc. in eo ſolo caſu in poteſtate eſſe concipimus, vbi per rei naturam errores x, x', x'' etc. ipſis 1, μ', μ'' etc. proportionales, aeque probabiles cenſendi ſunt, aut potius vbi

$$\varphi x = \mu'\varphi'(\mu' x) = \mu''\varphi''(\mu'' x) \text{ etc.}$$

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'\mu'}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''\mu''} \text{ etc.}$$

i. e. coëfficientes α', α'' etc. aequales ſtatui debent ponderibus relatiuis obſeruationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., aſſumto pondere obſeruationis, ad quam pertinet error x, pro vnitate. Hoc pacto, deſignante vt ſupra σ multitudinem errorum propoſitorum, habebimus valorem medium expreſſionis

$$\frac{xx + \alpha' x' x' + \alpha'' x'' x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= mm$, atque errorem medium metuendum, dum valorem fortuito determinatum huius expreſſionis pro valore vero ipſius mm adoptamus

$$\frac{\sqrt{(n^4 + \alpha'\alpha' n'^4 + \alpha''\alpha'' n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4)}}{\sigma}$$

et proin, ſiquidem licet, ipſas n, n', n'' etc. ipſis m, m', m'' proportionales ſupponere,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

quae formula identica eſt cum ea, quam ſupra pro caſu obſeruationum eiusdem generis inueneramus.

17.

Si valor quantitatis, quae ab alia quantitate incognita pendet, per obſeruationem praecilione abſoluta non gaudentem determinata eſt, valor incognitae hinc calculatus etiam errori obnoxiûs erit, ſed nihil in hac determinatione arbitrio relinquitur. At ſi *plures* quantitates ab eadem incognita pendentes per obſeruationes haud abſolute exactas iunotuerunt, valorem incognitae vel per quamlibet harum obſeruationum eruere poſſumus, vel per aliquam plurium obſeruationum combinationem, quod infinitis modis diuerſis fieri poteſt. Quamquam vero valor incognitae tali modo prodiens errori ſemper obnoxius manet, tamen in alia

combinatione maior, in alia minor error metuendus erit. Similiter res ſe habebit, ſi plures quantitates a pluribus incognitis ſimul pendentes ſunt obſeruatae: prout obſeruationum multitudo multitudini incognitarum vel aequalis, vel hac minor vel maior fuerit, problema vel determinatum, vel indeterminatum, vel plus quam determinatum erit (generaliter ſaltem loquendo), et in caſu tertio ad incognitarum determinationem obſeruationes infinitis modis diuerſis combinari poterunt. E tali combinationum varietate eas eligere, quae maxime ad rem faciant, i. e. quae incognitarum valores erroribus minimis obnoxios ſuppeditent, problema ſane eſt in applicatione matheſeos ad philoſophiam naturalem longe grauiſſimum.

In Theoria motus corporum coeleſtium oſtendimus, quomodo valores incognitarum *maxime probabiles* eruendi ſint, ſi lex probabilitatis errorum obſeruationum cognita ſit; et quum haec lex natura ſua in omnibus fere caſibus hypothetica maneat, theoriam illam ad legem maxime plauſibilem applicauimus, vbi probabilitas erroris x quantitati exponentiali e^{-hhxx} proportionalis ſupponitur, vnde methodus a nobis dudum in calculis praeſertim aſtronomicis, et nunc quidem a pleriſque calculatoribus ſub nomine methodi quadratorum minimorum vſitata demanauit.

Poſtea ill. Laplace, rem alio modo aggreſſus, idem principium omnibus aliis etiamnum praeferendum eſſe docuit, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, ſi modo obſeruationum multitudo ſit permagna. At pro multitudine obſeruationum modica, res intacta manſit, ita vt ſi lex noſtra hypothetica reſpuatur, methodus quadratorum minimorum eo tantum nomine praealiis commendabilis habenda ſit, quod calculorum concinnitati maxime eſt adaptata.

Geometris itaque gratum fore ſperamus, ſi in hac noua argumenti tractatione docuerimus, methodum quadratorum mini-

morum exhibere combinationem ex omnibus optimam, non quidem proxime, sed absolute, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, quaecunque obseruationum multitudo, si modo notionem erroris medii non ad mentem ill. Laplace, sed ita vt in artt. 5 et 6 a nobis factum est stabiliamus.

Ceterum expressis verbis hic praemonere conuenit, in omnibus disquisitionibus sequentibus tantummodo de erroribus irregularibus atque a parte constante liberis sermonem esse, quum proprie ad perfectam artem obseruandi pertineat, omnes errorum constantium causas summo studio amouere. Quaenam vero subsidia calculator tales obseruationes tractare suscipiens, quas ab erroribus constantibus non liberas esse iusta suspicio adest, ex ipso calculo probabilium petere possit, disquisitioni peculiari alia occasione promulgandae reseruamus.

18.

Problema.

Designante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipsius U metuendus, si pro V, V', V'' etc. adoptentur non valores veri, sed ii, qui ex obseruationibus ab invicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' etc. resp. obnoxiis prodeunt.

Sol. Denotatis erroribus in valoribus obseruatis ipsarum V, V', V'' etc. per e, e', e'' etc., error inde redundans in valorem ipsius U exprimi poterit per functionem linearem

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = E$$

vbi λ, λ', λ'' etc. sunt valores quotientium differentialium $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V}$ $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V'}$ $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}V''}$ etc. pro valoribus veris ipsarum V, V', V'' etc., siquidem obseruationes satis exactae sunt, vt errorum quadrata pro-

ductaque negligere liceat. Hinc primo sequitur, quoniam observationum errores a partibus constantibus liberi supponuntur, valorem medium ipsius E esse $= 0$. Porro error medius in valore ipsius U metuendus, erit radix quadrata e valore medio ipsius EE, sive MM erit valor medius aggregati

$$\lambda\lambda ee + \lambda'\lambda' e'e' + \lambda''\lambda'' e''e'' + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

At valor medius ipsius $\lambda\lambda ee$ fit $\lambda\lambda mm$, valor medius ipsius $\lambda'\lambda' e'e'$ fit $= \lambda'\lambda' m'm'$ etc.; denique valores medii productorum $2\lambda\lambda' ee'$ etc. omnes fiunt $= 0$ Hinc itaque colligimus

$$M = \sqrt{(\lambda\lambda mm + \lambda'\lambda' m'm' + \lambda''\lambda'' m''m'' + \text{etc.})}$$

Huic solutioni quasdam annotationes adiicere conueniet.

I. Quatenus spectando obseruationum errores tanquam quantitates primi ordinis, quantitates ordinum altiorum negliguntur, in formula nostra pro λ, λ' λ'' etc. etiam valores eos quotientium $\frac{dU}{dV}$ etc. adoptare licebit, qui prodeunt e valoribus obseruatis quantitatum V, V', V'' etc. Quoties U est functio linearis, manifesto nulla prorsus erit differentia.

II. Si loco errorum mediorum obseruationum, harum pondera introducere malumus, sint haec, secundum vnitatem arbitrariam, resp p, p', p'' etc., atque P pondus determinationis valoris ipsius U e valoribus obseruatis quantitatum V, V', V'' etc. prodeuntis. Ita habebimus

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda\lambda}{p} + \frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \text{etc.}}$$

III. Si T est functio alia data quantitatum V, V', V'' etc. atque, pro harum valoribus veris,

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.}$$

error in determinatione valoris ipsius T, e valoribus obseruatis ipsarum V, V', V'' etc. petita, erit $= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' +$ etc., $= E$, atque error medius in ista determinatione metuendus $= \sqrt{(\alpha\alpha mm + \alpha'\alpha' m'm' + \alpha''\alpha'' m''m'' + \text{etc.})}$. Errores E, E' vero manifesto ab inuicem iam non erunt independentes, valorque medius producti EE', secus ac valor medius producti ee', non erit $= 0$, sed $= \alpha\lambda mm + \alpha'\lambda' m'm' + \alpha''\lambda'' m''m'' +$ etc.

IV. Problema nostrum etiam ad casum eum extendere licet, vbi valores quantitatum V, V', V'' etc. non immediate per obseruationes inueniuntur, sed quomodocunque ex obseruationum combinationibus deriuantur, si modo singularum determinationes ab inuicem sunt independentes, i. e. obseruationibus diuersis superstructae: quoties autem haec conditio locum non habet, formula pro M erronea euaderet. E. g. si vna alteraue obseruatio, quae ad determinationem valoris ipsius V inseruit, etiam ad valorem ipsius V' determinandum adhibita esset, errores e et e' haud amplius ab inuicem independentes forent, neque adeo producti ee' valor medius $= 0$. Si vero in tali casu nexus quantitatum V, V' cum obseruationibus simplicibus, e quibus deductae sunt, rite perpenditur, valor medius producti ee' adiumento annotationis III. assignari, atque sic formula pro M completa reddi poterit.

19.

Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum x, y, z etc., multitudo illarum $= \pi$, multitudo incognitarum $= \rho$, supponamusque, per obseruationes vel immediate vel mediate valores functionum inuentos esse $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc., ita tamen vt hae determinationes ab inuicem fuerint independentes. Si ρ maior est quam π, incognitarum euolutio manifesto fit problema indeterminatum; si ρ ipsi π aequalis est, singulae x, y, z etc. in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi vel redactae

concipi poſſunt, ita vt ex harum valoribus obſeruatis valores iſtarum inueniri poſſint, ſimulque adiumento art. praec. praeciſionem relatiuam ſingulis his determinationibus tribuendam aſſignare liceat; denique ſi ϱ minor eſt quam π, ſingulae x, y, z etc. infinitis modis diuerſis in formam functionum ipſarum V, V' V'' etc. redigi, adeoque illarum valores infinitis modis diuerſis erui poterunt. Quae determinationes exacte quidem quadrare deberent, ſi obſeruationes praeciſione abſoluta gauderent; quod quum ſecus ſe habeat, alii modi alios valores ſuppeditabunt, nec minus determinationes e combinationibus diuerſis petitae inaequali praeciſione inſtructae erunt.

Ceterum ſi in caſu ſecundo vel tertio functiones V, V', V'' etc. ita comparatae eſſent, vt $\pi - \varrho + 1$ ex ipſis, vel plures, tamquam functiones reliquarum ſpectare liceret, problema reſpectu poſteriorum functionum etiamnum plus quam determinatum eſſet, reſpectu incognitarum x, y, z etc. autem indeterminatum; harum ſcilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. abſolute exacti dati eſſent: ſed hunc caſum a disquiſitione noſtra excludemus.

Quoties V, V', V'' etc. per ſe non ſunt functiones *lineares* indeterminatarum ſuarum, hoc efficietur, ſi loco incognitarum primitiuarum introducuntur ipſarum differentiae a valoribus approximatis, quos aliunde cognitos eſſe ſupponere licet. Errores medios in determinationibus $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. metuendos reſp. denotabimus per m, m', m'' etc., determinationumque pondera per p, p', p'' etc., ita vt ſit $pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc. Rationem, quam inter ſe tenent errores medii, cognitam ſupponemus, ita vt pondera, quorum vnum ad lubitum accipi poteſt, ſint nota. Denique ſtatuemus

$(V - L)\sqrt{p} = v$, $(V' - L')\sqrt{p'} = v'$, $(V'' - L'')\sqrt{p''} = v''$ etc.

Manifeſto itaque res perinde ſe habebit, ac ſi obſeruationes immedia-

mediatae, aequali praecisione gaudentes, puta quarum error medius $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc., siue quibus pondus $= 1$ tribuitur, suppeditauissent

$$v = 0,\ v' = 0,\ v'' = 0 \text{ etc.}$$

20.

PROBLEMA.

Designantibus v, v', v'' etc. functiones lineares indeterminatarum x, y, z etc. sequentes

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ex omnibus systematibus coëfficientium $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc., qui indefinite dant

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

ita vt k sit quantitas determinata i. e. ab x, y, z etc. independens, eruere id, pro quo $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + $ etc. nanciscatur valorem minimum.

Solutio. Statuamus

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

etc.: eruntque etiam ξ, η, ζ etc. functiones lineares ipsarum x, y, z etc., puta

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma aa + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma bb + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma cc + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(vbi Σaa denotat aggregatum $aa + a'a' + a''a'' + $ etc., ac perinde de reliquis),

multitudoque ipſarum ξ, η, ζ etc. multitudini indeterminatarum x, y, z etc. aequalis, puta $= \pi$. Per eliminationem itaque elici poterit aequatio talis *)

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}$$

in qua ſubſtituendo pro ξ, η, ζ etc. valores earum ex III, aequatio identica prodire debet. Quare ſtatuendo

$$\left.\begin{aligned} &a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha \\ &a'\,[\alpha\alpha] + b'\,[\alpha\beta] + c'\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha' \\ &a''\,[\alpha\alpha] + b''\,[\alpha\beta] + c''\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} = \alpha'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

neceſſario erit indefinite

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A \quad \text{(V)}$$

Haec aequatio docet, inter ſyſtemata valorum coëfficientium x, x' x'' etc. certo etiam referendos eſſe hos $x = \alpha$, $x' = \alpha'$, $x'' = \alpha''$ etc., nec non, pro ſyſtemate quocunque, fieri debere indefinite

$$(x-\alpha)v + (x'-\alpha')v' + (x''-\alpha'')v'' + \text{etc.} = A - k$$

quae aequatio implicat ſequentes

$$\begin{aligned} &(x-\alpha)a + (x'-\alpha')a' + (x''-\alpha'')a'' + \text{etc.} = 0 \\ &(x-\alpha)b + (x'-\alpha')b' + (x''-\alpha'')b'' + \text{etc.} = 0 \\ &(x-\alpha)c + (x'-\alpha')c' + (x''-\alpha'')c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes reſp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et addendo, obtinemus propter (IV)

$$(x-\alpha)\alpha + (x'-\alpha')\alpha' + (x''-\alpha'')\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

ſine quod idem eſt

$$\begin{aligned} xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.} &= \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} \\ &+ (x-\alpha)^2 + (x'-\alpha')^2 + (x''-\alpha'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

vnde patet, aggregatum $xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}$ valorem minimum obtinere, ſi ſtatuatur $x = \alpha$, $x' = \alpha'$, $x'' = \alpha''$ etc. *Q. E. I.*

*) Ratio, cur ad denotandos coëfficientes e tali eliminatione prodeuntes, hos potiſſimum characteres elegerimus, infra elucebit.

Ceterum hic valor minimus ipſe ſequenti modo eruitur. Aequatio (V) docet eſſe

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} = 1$$
$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando has aequationes reſp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. et addendo, protinus habemus adiumento aequationum (IV)

$$\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} = [\alpha\alpha]$$

21.

Quum obſeruationes ſuppeditauerint aequationes (proxime veras) $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., ad valorem incognitae x inde eliciendum, combinatio illarum aequationum talis

$$xv + x'v' + x''v'' + \text{etc.} = 0$$

adhibenda eſt, quae ipſi x coëfficientem 1 conciliet, incognitasque reliquas y, z etc. eliminet; cui determinationi per art. 18. pondus

$$= \frac{1}{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}$$

tribuendum erit. Ex art. praec. itaque ſequitur, determinationem maxime idoneam eam fore, vbi ſtatuatur $x = \alpha$, $x' = \alpha'$, $x'' = \alpha''$ etc. Hoc pacto x obtinet valorem A, manifeſtoque idem valor etiam (absque cognitione multiplicatorum α, α', α'' etc.) protinus per eliminationem ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. elici poteſt,

Pondus huic determinationi tribuendum erit $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, ſiue error medius in ipſa metuendus

$$= m\sqrt{p}\,[\alpha\alpha] = m'\sqrt{p'}\,[\alpha\alpha] = m''\sqrt{p''}\,[\alpha\alpha] \text{ etc.}$$

Prorſus ſimili modo determinatio maxime idonea incognitarum reliquarum y, z etc. eosdem valores ipſis conciliabit, qui

per eliminationem ex iisdem aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. prodeunt.

Denotando aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc., siue quod idem est hoc

$$p(V-L)^2 + p'(V'-L')^2 + p''(V''-L'')^2 + \text{etc.}$$

per Ω, patet, $\tfrac{1}{2}\xi$, $\tfrac{1}{2}\eta$, $\tfrac{1}{2}\zeta$ etc. esse quotientes differentiales partiales functionis Ω, puta

$$\tfrac{1}{2}\xi = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x}, \quad \tfrac{1}{2}\eta = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y}, \quad \tfrac{1}{2}\zeta = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} \text{ etc.}$$

Quapropter valores incognitarum ex obseruationum combinatione maxime idonea prodeuntes, quos *valores maxime plausibiles* commode vocare possumus, identici erunt cum iis, per quos Ω valorem minimum obtinet. Iam $V - L$ indefinite exprimit differentiam inter valorem computatum et obseruatum. Valores itaque incognitarum maxime plausibiles iidem erunt, qui summam quadratorum differentiarum inter quantitatum V, V', V'' etc. valores obseruatos et computatos, per obseruationum pondera multiplicatorum, minimam efficiunt, quod principium in *Theoria Motus Corporum Coelestium* longe alia via stabiliueramus. Et si insuper praecisio relatiua singularum determinationum assignanda est, per eliminationem indefinitam ex aequationibus (III) ipsas x, y, z etc. in tali forma exhibere oportet:

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\beta\alpha]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\gamma\alpha]\xi + [\gamma\beta]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

etc.

quo pacto valores maxime plausibiles incognitarum x, y, z etc. erunt resp. A, B, C etc., atque pondera his determinationibus

tribuenda $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., ſiue errores medii in ipſis metuendi

pro x.....$m\sqrt{p}[\alpha\alpha] = m'\sqrt{p'}[\alpha\alpha] = m''\sqrt{p''}[\alpha\alpha]$ etc.

pro y.....$m\sqrt{p}[\beta\beta] = m'\sqrt{p'}[\beta\beta] = m''\sqrt{p''}[\beta\beta]$ etc.

pro z.....$m\sqrt{p}[\gamma\gamma] = m'\sqrt{p'}[\gamma\gamma] = m''\sqrt{p''}[\gamma\gamma]$ etc.

etc.

quod conuenit cum iis, quae in *Theoria Motus Corporum Coeleſtium* docuimus.

22.

De caſu omnium ſimpliciſſimo, ſimul vero frequentiſſimo, vbi vnica incognita adeſt, atque $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc., paucis ſeorſim agere conueniet. Erit ſcilicet $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., et proin

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{etc.})\, x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.})$$

Hinc porro

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

Si itaque e pluribus obſeruationibus inaequali praeciſione gaudentibus, et quarum pondera reſp. ſunt p, p', p'' etc., valor eiusdem quantitatis inuentus eſt e prima $= L$, e ſecunda $= L'$, e tertia $= L''$ etc., huius valor maxime plauſibilis erit

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

pondusque huius determinationis $= p + p' + p''$ etc. Si omnes

obſeruationes aequali praeciſione gaudent, valor maxime plauſibilis erit

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{ etc.}}{\pi}$$

i. e. aequalis medio arithmetico valorum obſeruatorum, huiusque determinationis pondus $= \pi$, accepto pondere obſeruationum pro vnitate.

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS POSTERIOR.

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA FEBR. 2, 1823.

23.

Plures adhuc ſuperſunt diſquiſitiones, per quas theoria praecedens tum illuſtrabitur tum ampliabitur.

Ante omnia inueſtigare oportet, num negotium eliminationis, cuius adiumento indeterminatae x, y, z etc. per ξ, η, ζ etc. exprimendae ſunt, ſemper ſit poſſibile. Quum multitudo illarum multitudini harum aequalis ſit, e theoria eliminationis in aequationibus lineariibus conſtat, illam eliminationem, ſi ξ, η, ζ etc. ab inuicem independentes ſint, certo poſſibilem fore; ſin minus, impoſſibilem. Supponamus aliquantiſper, ξ, η, ζ etc. non eſſe ab inuicem independentes, ſed exſtare inter ipſas aequationem identicam

$$0 = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

Habebimus itaque

$$F\Sigma aa + G\Sigma ab + H\Sigma ac + \text{etc.} = 0$$
$$F\Sigma ab + G\Sigma bb + H\Sigma bc + \text{etc.} = 0$$
$$F\Sigma ac + G\Sigma bc + H\Sigma cc + \text{etc.} = 0$$

etc., nec non

$$F\Sigma al + G\Sigma bl + H\Sigma cl + \text{etc.} = -K$$

Example. If $\mathfrak{A}$ is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [4]$$

then $\mathfrak{A}$ is $(1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$, and $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ are $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$.

2. Let $\mathfrak{A}$ be a matrix, and let $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$ be its rows. Then $\mathfrak{A}$ is said to be a *matrix of rank* r if $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \ldots$ are linearly dependent, and if any r of them are linearly independent. Thus a matrix of rank r has r linearly independent rows, and all the rows are linearly expressible in terms of any r linearly independent rows.

ADAMS, Lieut. Arthur Hugh, R.N.V.R. (Hood Battalion).
ADAMS, Lieut. Arthur Hugh, R.N.V.R. (Howe Battalion).
ADAMS, Lieut. Arthur Hugh, R.N.V.R. (Howe Battalion).

ADAMS, Lieut. Arthur Hugh, R.N.V.R. (Howe Battalion).
Killed May 31st, 1916, in the Battle of Jutland. Buried Odense, Denmark. Aged 24. Son of Mr. and Mrs. Adams, of Bedford.

$$aA+bB+cC+\text{etc.}+l=\lambda$$
$$a'A+b'B+c'C+\text{etc.}+l'=\lambda'$$
$$a''A+b''B+c''C+\text{etc.}+l''=\lambda''$$

etc.; ſtatuamus praeterea

$$\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+\text{etc.}=M$$

ita vt ſit M valor functionis Ω valoribus maxime plauſibilibus indeterminatarum reſpondens, adeoque per ea, quae in art. 20. demonſtrauimus, valor minimus huius functionis. Hinc erit $a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''+$ etc. valor ipſius ξ, valoribus $x=A$, $y=B$, $z=C$ etc. reſpondens, adeoque $=0$, i. e. habebimus

$$\Sigma a\lambda=0$$

et perinde fiet

$$\Sigma b\lambda=0,\ \Sigma c\lambda=0 \text{ etc.; nec non } \Sigma\alpha\lambda=0,\ \Sigma\beta\lambda=0,\ \Sigma\gamma\lambda=0 \text{ etc.}$$

Denique multiplicando expreſſiones ipſarum $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. reſp., et addendo, obtinemus $l\lambda+l'\lambda'+l''\lambda''+$ etc. $=\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+$ etc., ſiue

$$\Sigma l\lambda=M.$$

26.

Substituendo in aequatione $v=ax+by+cz+$ etc. $+l$, pro x, y, z etc. expreſſiones VII. art. 21, prodibit, adhibitis reductionibus ex praecedentibus obuiis,

$$v=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\text{etc.}+\lambda$$

et perinde erit indefinite

$$v'=\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta+\text{etc.}+\lambda'$$
$$v''=\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta+\text{etc.}+\lambda''$$

etc. Multiplicando vel has aequationes, vel aequationes I art. 20. reſp. per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc., et addendo, diſcimus eſſe indefinite

$$\lambda v+\lambda' v'+\lambda'' v''+\text{etc.}=M.$$

Bhatia, V. S. Gribble, S. Hansen, [name illegible] Jones, [illegible] Kaufmann, [illegible] Kelly, [illegible] Kuhn, [illegible] Lee, [illegible] Lewis, [illegible] Lin, [illegible] Lindsay, [illegible] Lyons, [illegible] Mahoney, [illegible] Mayer, [illegible] Mayer, [illegible] Mayer

$-e''\sqrt{p''}$ etc. Hinc valor verus ipſius x erit $= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''}$ etc., ſiue error valoris ipſius x, in determinatione maxime idonea commiſſus, quem per Ex denotare conuenit,

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Perinde error valoris ipſius y in determinatione maxime idonea commiſſus, quem per Ey denotabimus, erit

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Valor medius quadrati $(Ex)^2$ inuenitur $= mmp(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\alpha]$; valor medius quadrati $(Ey)^2$ perinde $= mmp[\beta\beta]$ etc, vt iam ſupra docuimus. Iam vero etiam valorem medium *producti* $Ex.Ey$ aſſignare licet, quippe qui inuenitur

$$= mmp(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\beta].$$

Concinne haec ita quoque exprimi poſſunt. Valores medii quadratorum $(Ex)^2$, $(Ey)^2$ etc. reſp. aequales ſunt productis ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientes differentialium partialium ſecundi ordinis

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\xi^2}, \quad \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\eta^2} \text{ etc.}$$

valorque medius producti talis, vt $Ex.Ey$, aequalis eſt producto ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientem differentialem $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}$, quatenus quidem Ω tamquam functio indeterminatarum ξ, η, ζ etc. conſideratur.

29.

Deſignet t functionem datam linearem quantitatum x, y, z etc. puta ſit

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Valor ipſius t, e valoribus maxime plauſibilibus ipſarum x, y, z etc. prodiens hinc erit $= fA + gB + hC + \text{etc.} + k$, quem per K denotabimus. Qui ſi tamquam valor verus ipſius t adoptatur, error committitur, qui erit

$$= fEx + gEy + hEz + \text{etc.}$$

atque per Et denotabitur. Manifesto valor medius huius erroris fit $= 0$, siue error a parte constante liber erit. At valor medius quadrati $(Et)^2$, siue valor medius aggregati

$$ff(Ex)^2 + 2fgEx.Ey + 2fhEx.Ez + \text{etc.}$$
$$+ gg(Ey)^2 + 2ghEy.Ez + \text{etc.}$$
$$+ hh(Ez)^2 + \text{etc. etc.}$$

per ea, quae in art. praec. exposuimus, aequalis fit producto ex mmp in aggregatum

$$ff[\alpha\alpha] + 2fg[\alpha\beta] + 2fh[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$
$$+ gg[\beta\beta] + 2gh[\beta\gamma] + \text{etc.}$$
$$+ hh[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.}$$

siue producto ex mmp in valorem functionis $\Omega - M$, qui prodit per substitutiones

$$\xi = f,\ \eta = g,\ \zeta = h \text{ etc.}$$

Denotando igitur hunc valorem determinatum functionis $\Omega - M$ per ω, error medius metuendus, dum determinationi $t = K$ adhaeremus, erit $= m\sqrt{p}\,\omega$, siue pondus huius determinationis $= \frac{1}{\omega}$.

Quum indefinite habeatur $\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \text{etc.}$, patet, ω quoque aequalem esse valori determinato expressionis $(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h + \text{etc.}$, siue valori determinato ipsius $t - K$, qui prodit, si indeterminatis x, y, z etc. tribuuntur valores ii, qui respondent valoribus ipsarum ξ, η, ζ etc. his f, g, h etc.

Denique obseruamus, si t indefinite in formam functionis ipsarum ξ, η, ζ etc. redigatur, ipsius partem constantem necessario fieri $= K$. Quodsi igitur indefinite fit

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

erit $\omega = fF + gG + hH + \text{etc.}$

30.

Functio Ω valorem suum *absolute minimum* M, vt supra vidimus, nanciscitur, faciendo $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., siue $\xi = 0$

$\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. Si vero alicui illarum quantitatum valor *alius* iam tributus eſt, e. g. $x = A + \Delta$, variantibus reliquis Ω aſſequi poteſt valorem relatiue minimum, qui manifeſto obtinetur adiumento aequationum

$$x = A + \Delta, \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y} = 0, \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x} = 0 \text{ etc.}$$

Fieri debet itaque $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc., adeoque, quoniam $x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta +$ etc., $\xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Simul habebitur

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]\Delta}{[\alpha\alpha]}, \; z = C + \frac{[\alpha\gamma]\Delta}{[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Valor relatiue minimus ipſius Ω autem fit $= [\alpha\alpha]\,\xi\xi + M = M + \frac{\Delta\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Vice verſa hinc colligimus, ſi valor ipſius Ω limitem praeſcriptum $M + \mu\mu$ non ſuperare debet, valorem ipſius x neceſſario inter limites $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ et $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ contentum eſſe debere. Notari meretur, $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ aequalem fieri errori medio in valore maxime plauſibili ipſius x metuendo, ſi ſtatuatur $\mu = m\sqrt{p}$, i. e. ſi μ aequalis ſit errori medio obſeruationum talium, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

Generalius inueſtigemus valorem minimum ipſius Ω, qui pro valore dato ipſius t locum habere poteſt, denotante t vt in art. praec. functionem linearem $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$, et cuius valor maxime plauſibilis $= K$: valor praeſcriptus ipſius t denotetur per $K + \varkappa$. E theoria maximorum et minimorum conſtat, problematis ſolutionem petendam eſſe ex aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x} = \theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y} = \theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} = \theta\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} \text{ etc.}$$

ſiue $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc., deſignante θ multiplicatorem adhuc indeterminatum. Quare ſi, vt in art. praec., ſtatuimus, eſſe *indefinite*

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

habebimus

$$K + x = \theta(fF + gG + hH + \text{etc.}) + K, \text{ ſiue}$$

$$\theta = \frac{x}{\omega}$$

accipiendo ω in eadem ſignificatione vt in art. praec. Et quum $\Omega - M$, indefinite, ſit functio homogenea ſecundi ordinis indeterminatarum ξ, η, ζ etc., ſponte patet, eius valorem pro $\xi = \theta f$, $\eta = \theta g$, $\zeta = \theta h$ etc. fieri $= \theta\theta\omega$, et proin valorem minimum, quem Ω pro $t = K + x$ obtinere poteſt, fieri $= M + \theta\theta\omega = M + \frac{xx}{\omega}$. Vice verſa, ſi Ω debet valorem aliquem praeſcriptum $M + \mu\mu$ non ſuperare, valor ipſius t neceſſario inter limites $K - \mu\sqrt{\omega}$ et $K + \mu\sqrt{\omega}$ contentus eſſe debet, vbi $\mu\sqrt{\omega}$ aequalis ſit errori medio in determinatione maxime plauſibili ipſius t metiendo, ſi pro μ accipitur error medius obſeruationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

31.

Quoties multitudo quantitatum x, y, z etc. paullo maior eſt, determinatio numerica valorum A, B, C etc. ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. per eliminationem vulgarem ſatis moleſta euadit. Propterea in Theoria Motus Corporum Coeleſtium art. 182 algorithmum peculiarem addigitauimus, atque in *Diſquiſitione de elementis ellipticis Palladis* (Comm. recent. Soc. Gotting. Vol. I.) copioſe explicauimus, per quem labor ille ad tantam quantam quidem res fert ſimplicitatem euehitur. Reducenda ſcilicet eſt functio Ω ſub formam talem:

$$\frac{u^0 u^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u' u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u'' u''}{\mathfrak{C}''} + \frac{u''' u'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + M$$

vbi diuiſores $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. ſunt quantitates determinatae; u^0, u', u'', u''' etc. autem functiones lineares ipſarum x, y, z etc. quarum tamen ſecunda u' libera eſt ab x, tertia u'' libera ab x et y, quarta libera ab x, y et z, et ſic porro, ita vt vltima $u^{(\varkappa-1)}$ ſolam vltimam indeterminatarum x, y, z etc. implicet; denique coëfficientes, per quos x, y, z etc. reſp. multiplicatae ſunt in u^0, u', u'' etc., reſp. aequales ſunt ipſis $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. Quibus ita factis ſtatuendum eſt $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc., vnde valores incognitarum x, y, z etc. inuerſo ordine commodiſſime elicientur. Haud opus videtur, algorithmum ipſum, per quem haec transformatio functionis Ω abſoluitur, hic denuo repetere.

Sed multo adhuc magis prolixum calculum requirit eliminatio indefinita, cuius adiumento illarum determinationum pondera inuenire oportet. Pondus quidem determinationis incognitae vltimae (quae ſola vltimam $u^{(\varkappa-1)}$ ingreditur) per ea, quae in Theoria Motus Corporum Coeleſtium demonſtrata ſunt, facile invenitur aequale termino vltimo in ſerie diuiſorum $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc.; quapropter plures calculatores, vt eliminationem illam moleſtam euitarent, deficientibus aliis ſubſidiis, ita ſibi conſuluerunt, vt algorithmum de quo diximus pluries, mutato quantitatum x, y, z etc., ordine, repeterent, ſingulis deinceps vltimum locum occupantibus. Gratum itaque geometris fore ſperamus, ſi modum nouum pondera determinationum calculandi, e penitiori argumenti perſcrutatione hauſtum hic exponamus, qui nihil amplius deſiderandum relinquere videtur.

32.

Statuamus itaque esse (I)

$$u^\circ = \mathfrak{A}^\circ x + \mathfrak{B}^\circ y + \mathfrak{C}^\circ z + \text{etc.} + \xi^\circ$$
$$u' = \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \xi'$$
$$u'' = \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \xi''$$
$$\text{etc.}$$

Hinc erit indefinite

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega = \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$$
$$= \frac{u^\circ\,\mathrm{d}u^\circ}{\mathfrak{A}^\circ} + \frac{u'\,\mathrm{d}u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''\,\mathrm{d}u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.}$$
$$= u^\circ\left(\mathrm{d}x + \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,\mathrm{d}z + \text{etc.}\right)$$
$$+ u'\left(\mathrm{d}y + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\,\mathrm{d}z + \text{etc.}\right) + u''(\mathrm{d}z + \text{etc.}) + \text{etc.}$$

vnde colligimus (II)

$$\xi = u^\circ$$
$$\eta = \frac{\mathfrak{B}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,u^\circ + u'$$
$$\zeta = \frac{\mathfrak{C}^\circ}{\mathfrak{A}^\circ}\,u^\circ + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\,u' + u''$$
$$\text{etc.}$$

Supponamus, hinc deriuari formulas sequentes (III)

$$u^\circ = \xi$$
$$u' = A'\xi + \eta$$
$$u'' = A''\xi + B''\eta + \zeta$$
$$\text{etc.}$$

Iam e differentiali completo aequationis

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$$

subtracta aequatione

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega = \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

sequitur

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\Omega = (x - A)\,\mathrm{d}\xi + (y - B)\,\mathrm{d}\eta + (z - C)\,\mathrm{d}\zeta + \text{etc.}$$

(see equality (Exam. 6), (Exer. 1)) $a \equiv b \pmod{m}$ if m divides $a - b$.

Thus, since $\frac{1}{2}(p-1)$ is an integer, $\frac{1}{2}(p-1)(p+1) = \frac{1}{2}(p^2-1)$ is also an integer, and

$$\frac{1}{2}(p^2-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Also

$$\frac{1}{2}(p^2-1) = \frac{1}{2}(p-1)(p+1) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Hence $\frac{1}{2}(p^2-1)$ is the multiple of p and of 2 which is nearest to $\frac{1}{2}p^2$, that is, $\frac{1}{2}(p^2-1)$ is the multiple of p which is nearest to $\frac{1}{2}p^2$. Therefore

$$\text{Exam. 7.} \qquad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p^2-1)}.$$

Also

$$\text{Exam. 8.} \qquad \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}.$$

Exam. 9. Let p and q be two odd primes. Then $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}$.

Proof. Consider the rectangle with vertices at $(0,0)$, $(\frac{1}{2}p, 0)$, $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$, $(0, \frac{1}{2}q)$. Let N be the number of points with integral coordinates in the interior of this rectangle. Then $N = \frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)$. Let M be the number of points with integral coordinates in the interior of the rectangle with vertices at $(0,0)$, $(\frac{1}{2}q, 0)$, $(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}p)$, $(0, \frac{1}{2}p)$. Then $M = \frac{1}{2}(q-1)\frac{1}{2}(p-1)$. Hence $N = M$.

Let P be the number of points with integral coordinates in the interior of the triangle with vertices at $(0,0)$, $(\frac{1}{2}p, 0)$, $(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q)$. Let Q be the number of points with integral coordinates in the interior of the triangle with vertices at $(0,0)$, $(\frac{1}{2}q, 0)$, $(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}p)$. Then $N = P + Q$.

Section 2.—1. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$. Any value does for x_4.

2. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

3. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

4. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

5. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Ceterum combinatio aequationum I cum IV ad easdem formulas perducit, insuperque calculum duplicem ad eruendos valores maxime plausibiles A, B, C etc. ipsos suppeditat, puta *primo*

$$A = -\frac{\xi^0}{\mathfrak{A}^0} - A'\frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - A''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - A'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$B = \quad - \frac{\xi'}{\mathfrak{B}'} - B''\frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - B'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

$$C = \quad - \frac{\xi''}{\mathfrak{C}''} - C'''\frac{\xi'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}$$

etc.

Calculus alter identicus est cum vulgari, vbi statuitur $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc.

34.

Quae in art. 32. exposuimus, sunt tantummodo casus speciales theorematis generalioris, quod ita se habet:

Theorema. *Designet t functionem linearem indeterminatarum x, y, z etc. hanc*

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

quae transmutata in functionem indeterminatarum u^0, u', u'' etc fiat

$$t = k^0 u^0 + k' u' + k'' u'' + \text{etc.} + K$$

Quibus ita se habentibus erit K valor maxime plausibilis ipsius t, atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0 k^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' k' + \mathfrak{C}'' k'' k'' + \text{etc.}}$$

Dem. Pars prior theorematis inde patet, quod valor maxime plausibilis ipsius t valoribus $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. respondere debet. Ad posteriorem demonstrandam obseruamus, quoniam $\frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$, atque $\mathrm{d}t = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$, esse, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc.

$$\mathrm{d}\Omega = 2\,\mathrm{d}t$$

Hinc vero sequitur, pro iisdem valoribus $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., fieri

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\,\mathrm{d}\,u^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}\,\mathrm{d}\,u' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}\,\mathrm{d}\,u'' + \text{etc.} = k^0\,\mathrm{d}\,u^0 + k'\,\mathrm{d}\,u' + k''\,\mathrm{d}\,u'' + \text{etc.}$$

Iam facile perspicitur, si $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc. sint ab inuicem independentes, etiam $\mathrm{d}\,u^0$, $\mathrm{d}\,u'$, $\mathrm{d}\,u''$ etc., ab inuicem independentes esse; vnde colligimus, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc. esse

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0,\quad u' = \mathfrak{B}' k',\quad u'' = \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc}$$

Quamobrem valor ipsius Ω, iisdem valoribus respondens erit

$$= \mathfrak{A}^0 k^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' k' + \mathfrak{C}'' k'' k'' + \text{etc.} + M.$$

vnde per art. 29. theorematis nostri veritas protinus demanat.

Ceterum si transformationem functionis t immediate, i. e. absque cognitione substitutionum IV. art. 30, perficere cupimus, praesto sunt formulae:

$$f = \mathfrak{A}^0 k^0$$
$$g = \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}' k'$$
$$h = \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k''$$

etc., vnde coëfficientes k^0, k', k'' etc. deinceps determinabuntur, tandemque habebitur

$$K = -\mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}' k' - \mathfrak{L}'' k'' - \text{etc.}$$

35.

Tractatione peculiari dignum est problema sequens, tum propter vtilitatem practicam, tum propter solutionis concinnitatem.

Inuenire mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum ab accessione aequationis nouae productas, nec non pondera nouarum determinationum.

Retinebimus designationes in praecedentibus adhibitas, ita vt aequationes primitiuae, ad pondus $= 1$ reductae, sint haec

$v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc.; aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc. $= \Omega$; porro vt ξ, η, ζ etc. ſint quotientes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}z} \text{ etc.}$$

denique vt ex eliminatione indefinita ſequantur

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\alpha\beta]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\alpha\gamma]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

Iam ſupponamus, accedere aequationem nouam $v^* = 0$ (proxime veram, et cuius pondus $= 1$), et inquiramus, quantas mutationes hinc nacturi ſint tum valores incognitarum maxime plauſibiles A, B, C etc., tum coëfficientes $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc.

Statuamus $\Omega + v^*v^* = \Omega^*$,

$$\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}x} = \xi^*, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}y} = \eta^*, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}z} = \zeta^* \text{ etc.}$$

ſupponamusque, hinc per eliminationem ſequi

$$x = A^* + [\alpha\alpha^*]\xi^* + [\alpha\beta^*]\eta^* + [\alpha\gamma^*]\zeta^* \text{ etc.}$$

Denique ſit

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k$$

prodeat inde, ſubſtitutis pro x, y, z etc. valoribus ex (I),

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

ſtatuaturque $Ff + Gg + Hh + \text{etc.} = \omega$.

Manifeſto K erit valor maxime plauſibilis functionis v^*, quatenus ex aequationibus primitiuis ſequitur, ſine reſpectu valoris 0 quem obſeruatio acceſſoria praebuit, atque $\frac{1}{\omega}$ pondus iſtius determinationis.

Iam habemus

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

adeoque

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \text{etc.})$$

fiue $v^* = \dfrac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K}{1+\omega}$

Perinde fit

$$\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - v^*(f[\alpha\alpha] \\ &\quad + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.}) \\ &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - Fv^* \\ &= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\beta]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - \frac{F}{1+\omega}(F\xi^* \\ &\quad + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K) \end{aligned}$$

Hinc itaque colligimus

$A^* = A - \dfrac{FK}{1+\omega}$, qui erit valor maxime plauſibilis ipſius x ex *omnibus* obſeruationibus;

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{FF}{1+\omega}$$

adeoque pondus iſtius determinationis

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \dfrac{FF}{1+\omega}}$$

Prorſus eodem modo inuenitur valor maxime plauſibilis ipſius y, *omnibus* obſeruationibus ſuperſtructus

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega}$$

atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \dfrac{GG}{1+\omega}}$$

et ſic porro. *Q. E. I.*

Liceat huic ſolutioni quasdam annotationes adiicere.

I. Subſtitutis his nouis valoribus A^*, B^*, C^* etc., functio v^* obtinet valorem maxime plauſibilem

$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}$. Et quum indefinite fit

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\cdot\xi' + \frac{G}{1+\omega}\cdot\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\cdot\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

pondus iſtius determinationis per principia art. 29. eruitur

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Eadem immediate reſultant ex applicatione regulae in fine art 21. traditae; ſcilicet complexus aequationum primitiuarum praebuerat determinationem $v^* = K$ cum pondere $= \frac{1}{\omega}$, dein obſeruatio noua dedit determinationem aliam, ab illa independentem, $v^* = 0$, cum pondere $= 1$, quibus combinatis prodit determinatio $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ cum pondere $= \frac{1}{\omega} + 1$.

II. Hinc porro ſequitur, quum pro $x = A^*$, $y = B^*$, $z = C^*$ etc. eſſe debeat $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc., pro iisdem valoribus fieri

$$\xi = -\frac{fK}{1+\omega},\ \eta = -\frac{gK}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{hK}{1+\omega}\ \text{etc.}$$

nec non, quoniam indefinite $\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + g(z - C) + \text{etc.} + M$,

$$\Omega = \frac{KK}{(1+\omega)^2}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) + M = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2};$$

denique, quoniam indefinite $\Omega^* = \Omega + v^* v^*$,

$$\Omega^* = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2} + \frac{KK}{(1+\omega)^2} = M + \frac{KK}{1+\omega}$$

III. Comparando haec cum iis quae in art. 30. docuimus, animaduertimus, functionem Ω hic valorem minimum obtinere, quem pro valore determinato functionis $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ accipere poteſt.

36.

Problematis alius, praecedenti affinis, puta

Inueſtigare mutationes valorum maxime plauſibilium incognitarum, a mutato pondere vnius ex obſeruationibus primitiuis oriundas, nec non pondera nouarum determinationum

ſolutionem tantummodo hic adſcribemus, demonſtrationem, quae ad inſtar art. praec. facile abſoluitur, breuitatis cauſſa ſupprimentes.

Supponamus, peracto demum calculo animaduerti, alicui obſeruationum pondus ſeu nimis paruum, ſeu nimis magnum tributum eſſe, e. g. obſeruationi primae, quae dedit $V = L$, loco ponderis p in calculo adhibiti rectius tribui pondus $= p^*$. Tunc haud opus erit calculum integrum repetere, ſed commodius correctiones per formulas ſequentes computare licebit.

Valores incognitarum maxime plauſibiles correcti erunt hi:

$$x = A - \frac{(p^* + p)\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = B - \frac{(p^* - p)\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = C - \frac{(p^* - p)\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc. ponderaque harum determinationum inuenientur, diuidendo vnitatem reſp. per

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\alpha\alpha}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\beta\beta}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\gamma\gamma}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \text{ etc.}$$

Haec ſolutio ſimul complectitur caſum, vbi peracto calculo percipitur, vnam ex obſeruationibus omnino reiici debuiſſe, quum hoc idem ſit ac ſi facias $p^* = 0$; et perinde valor $p^* = \infty$ refer-

tur ad casum eum, vbi aequatio $V = L$, quae in calculo tamquam approximata tractata erat, reuera praecisione absoluta gaudet.

Ceterum quoties vel aequationibus, quibus calculus superstructus erat, *plures* nouae accedunt, vel *pluribus* ex illis pondera erronea tributa esse percipitur, computus correctionum nimis complicatus euaderet; quocirca in tali casu calculum ab integro reficere praestabit.

37.

In art. 15, 16. methodum explicauimus, obseruationum praecisionem proxime determinandi *). Sed haec methodus supponit, errores, qui reuera occurrerint, satis multos exacte cognitos esse, quae conditio, stricte loquendo, rarissime, ne dicam numquam, locum habebit. Quodsi quidem quantitates, quarum valores approximati per obseruationes innotuerunt, secundum legem cognitam, ab vna pluribusue quantitatibus incognitis pendent, harum valores maxime plausibiles per methodum quadratorum minimorum eruere licebit, ac deip valores quantitatum, quae obseruationum obiecta fuerant, illinc computati perparum a valoribus veris discrepare censebuntur, ita vt ipsorum differentias a valoribus obseruatis eo maiori iure tamquam obseruationum errores veros adoptare liceat, quo maior fuerit harum multitudo. Hanc praxin sequuti sunt omnes calculatores, qui observationum praecisionem in casibus concretis a posteriori aestimare susceperunt: sed manifesto illa theoretice erronea est, et quamquam in casibus multis ad vsus practicos sufficere possit, tamen

*) Disquisitio de eodem argumento, quam in commentatione anteriori (*Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* Vol. I, p. 185.) tradideramus, eidem hypothesi circa indolem functionis probabilitatem errorum exprimentis innixa erat, cui in Theoria motus corporum coelestium methodum quadratorum minimorum superstruxeramus (vid. art. 9, III.).

in aliis enormiter peccare poteſt. Summopere itaque hoc argumentum dignum eſt, quod accuratius enodetur.

Retinebimus in hac disquiſitione deſignationes inde ab art. 19. adhibitas. Praxis ea de qua diximus, quantitates A, B, C etc. tamquam valores veros ipſarum x, y, z conſiderat, et proin ipſas λ, λ', λ'' etc. tamquam valores veros functionum v, v', v'' etc. Si omnes obſeruationes aequali praeciſione gaudent, ipſarumque pondus $p = p' = p''$ etc. pro vnitate acceptum eſt, eaedem quantitates, ſignis mutatis, in illa ſuppoſitione obſeruationum errores exhibent, vnde praecepta art. 15, praebent obſeruationum errorem medium m

$$= \sqrt{\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

Si obſeruationum praeciſio non eſt eadem, quantitates $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. exhiberent obſeruationum errores per radices quadratas e ponderibus multiplicatos, praeceptaque art. 16. ad eandem formulam $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ perducerent, iam errorem medium talium obſervationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur, denotantem. Sed manifeſto calculus exactus requireret, vt loco quantitatum λ, λ', λ'' etc. valores functionum v, v', v'' etc. e valoribus veris ipſarum x, y, z etc. prodeuntes adhiberentur, i. e. loco ipſius M, valor functionis Ω valoribus veris ipſarum x, y, z etc. reſpondens. Qui quamquam aſſignari nequeat, tamen certi ſumus, eum eſſe maiorem quam M (quippe qui eſt minimus poſſibilis), excipiendo caſum infinite parum probabilem, vbi incognitarum valores maxime plauſibiles exacte cum veris quadrant. In genere itaque affirmare poſſumus, praxin vulgarem errorem medium iuſto minorem producere, ſiue obſeruationibus praeciſionem nimis magnam tribuere. Videamus iam, quid doceat theoria rigoroſa.

Ille concubuerat. Hic, ut somnus inter fratres perfidos, et
pectora conscia, facilis, et in vultum serpit, et ex animo
exit. Ille, ut primum quievit furor, et mens redit, et
vidit quid fecisset, et quid facere instituisset, et se
totum in fratris sanguine vidit, et manus, et arma
fraterna cæde fœda, et multo respersa cruore, et
circa se inimicos, non hostes, sed ante victos, et
victoriam, et bellum, et causas belli, et deos testes,
et omnia nefanda, et se ipsum, quod omnium nefandissimum
fuit, execratus, et detestatus, et exosus, et
quæsitum ab se exilium, et amissum regnum, et
ereptum fratri, et ademptum civibus, et ademptos
civibus, et ademptum patri, et ademptum sibi, et
omnia quæ ademerat, et quæ non habebat, et
quæ habere cupiebat, et quæ habere nolebat, et
quæ habere nefas erat, et quæ habere scelus erat,
et quæ habere pœna erat, et quæ habere miserum
erat, et quæ habere miserrimum erat, et quæ
habere miserum esse erat, et quæ habere miserrimum
esse erat, et quæ habere miserum esse erat, et
quæ habere miserrimum esse erat, et quæ habere
miserum esse erat, et quæ habere miserrimum esse
erat, et quæ habere miserum esse erat, et quæ
habere miserrimum esse erat, et quæ habere miserum
esse erat, et quæ habere miserrimum esse erat,
et quæ habere miserum esse erat, et quæ habere
miserrimum esse erat, et quæ habere miserum esse
erat, et quæ habere miserrimum esse

omnino omittimus, vel quod idem eſt, ſi loco cuiusuis quadrati $\varepsilon\varepsilon$, $\varepsilon'\varepsilon'$, $\varepsilon''\varepsilon''$ etc. ſcribimus $\mu\mu$, productis $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$ $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. prorſus neglectis. Hoc modo e termino Ω° manifeſto prouenit $\pi\mu\mu$; terminus $-x^\circ\xi^\circ$ producet

$$-(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu\mu = -\mu\mu$$

et ſimiliter ſingulae partes reliquae praebebunt $-\mu\mu$, ita vt valor medius totalis fiat $=(\pi-\varrho)\mu\mu$, denotante π multitudinem obſeruationum, ϱ multitudinem incognitarum. Valor verus quidem ipſius M, prout fors errores obtulit, maior minorue medio fieri poteſt, ſed diſcrepantia eo minoris momenti erit, quo maior fuerit obſeruationum multitudo, ita vt pro valore approximato ipſius μ accipere liceat

$$\sqrt{\frac{M}{\pi-\varrho}}$$

Valori itaque ipſius μ, ex praxi erronea, de qua in art. prace. loquuti ſumus, prodiens, augeri debet in ratione quantitatis $\sqrt{(\pi-\varrho)}$ ad $\sqrt{\pi}$.

39.

Quo clarius eluceat, quanto iure valorem fortuitum ipſius M medio aequiparare liceat, adhuc inueſtigare oportet errorem medium metuendum, dum ſtatuimus $\frac{M}{\pi-\varrho} = mm$. Iſte error medius aequalis eſt radici quadratae e valore medio quantitatis

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.} - (\pi-\varrho)mm}{\pi-\varrho}\right)^2$$

quam ita exhibebimus

$$\left(\frac{\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.}}{\pi-\varrho}\right)^2$$

$$-\frac{2\mu\mu}{\pi-\varrho}\left(\Omega^\circ - x^\circ\xi^\circ - y^\circ\eta^\circ - z^\circ\zeta^\circ - \text{etc.} - (\pi-\varrho)\mu\mu\right) - \mu^4$$

et quum manifeſto valor medius termini ſecundi fiat $=0$, res in eo vertitur, vt indagemus valorem medium functionis

Ley 1437 de 2011, art. 47 y 48
Ley 1564 de 2012, art. 180 y 372 numeral 5

En mérito de lo expuesto, el Juzgado Veintiséis Administrativo Oral de Bogotá,

RESUELVE

PRIMERO: ADMITIR la demanda de nulidad y restablecimiento del derecho presentada por **ANA MARIA CASTAÑEDA RODRIGUEZ** identificada con cédula de ciudadanía No. 1.032.401.726 de Bogotá, en contra de la **NACIÓN – MINISTERIO DE DEFENSA NACIONAL – POLICÍA NACIONAL**.

SEGUNDO: NOTIFICAR personalmente el presente auto al señor **Director de Asuntos Legales del Ministerio de Defensa Nacional** o a quien haya delegado la facultad de recibir notificaciones, conforme lo establecido en el artículo 199 de la Ley 1437 de 2011 modificado por el artículo 612 de la Ley 1564 de 2012.

TERCERO: NOTIFICAR personalmente el presente auto al señor **Director de la Dirección de Talento Humano de la Policía Nacional** o a quien haya delegado la facultad de recibir notificaciones, conforme lo establecido en el artículo 199 de la Ley 1437 de 2011 modificado por el artículo 612 de la Ley 1564 de 2012.

CUARTO: NOTIFICAR personalmente el presente auto al señor **Agente del Ministerio Público** delegado ante este Despacho, conforme lo establecido en el artículo 199 de la Ley 1437 de 2011 modificado por el artículo 612 de la Ley 1564 de 2012.

QUINTO: NOTIFICAR personalmente el presente auto al señor **Director de la Agencia Nacional de Defensa Jurídica del Estado** o a quien haya delegado la facultad de recibir notificaciones, conforme lo establecido en el artículo 199 de la Ley 1437 de 2011 modificado por el artículo 612 de la Ley 1564 de 2012.

SEXTO: CORRER traslado de la demanda a la parte demandada por el término de treinta (30) días, de conformidad con lo establecido en el artículo 172 de la Ley 1437 de 2011.

SÉPTIMO: ORDENAR a la parte demandada que con la contestación de la demanda allegue el expediente administrativo que contenga los antecedentes de la actuación administrativa, en medio magnético, conforme lo establecido en el artículo 175 parágrafo 1 de la Ley 1437 de 2011.

OCTAVO: RECONOCER personería para actuar como apoderado de la parte demandante al abogado **JOSE ALEJANDRO BERMUDEZ CASTRO** identificado con cédula de ciudadanía No. 1.020.715.363 de Bogotá y portador de la tarjeta profesional No. 220.830 del Consejo Superior de la Judicatura, en los términos y para los efectos del poder conferido.

IV Haud abſimili modo inuenitur valor medius producti $x^0 y^0 \xi^0 \eta^0$

$$= \nu^4 \Sigma ab\alpha\beta + \mu^4 \Sigma a\alpha b'\beta' + \mu^4 \Sigma ab\alpha'\beta' + \mu^4 \Sigma a\beta b'\alpha'$$

Sed habetur

$$\Sigma a\alpha b'\beta' = \Sigma a\alpha . \Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta$$
$$\Sigma ab\alpha'\beta' = \Sigma ab . \Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta$$
$$\Sigma a\beta b'\alpha' = \Sigma a\beta . \Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha$$

vnde valor ille medius fit, propter $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$,

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4(1 + \Sigma ab . \Sigma\alpha\beta)$$

V. Quum prorſus eodem modo valor medius producti $x^0 z^0 \xi^0 \zeta^0$ fiat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4(1 + \Sigma ac . \Sigma\alpha\gamma)$$

et ſic porro, additio valorem medium producti $x^0 \xi^0 (x^0 \xi^0 + y^0 \eta^0 + z^0 \zeta^0 + \text{etc.})$ ſuppeditat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\varrho + 1)\mu^4$$
$$+ \mu^4(\Sigma aa . \Sigma\alpha\alpha + \Sigma ab . \Sigma\alpha\beta + \Sigma ac . \Sigma\alpha\gamma + \text{etc.})$$
$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(a\alpha(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\varrho + 2)\mu^4$$

VI. Prorſus eodem modo valor medius producti $y^0 \eta^0 (x^0 \xi^0 + z^0 \zeta^0 + \text{etc.})$ eruitur

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\varrho + 2)\mu^4$$

dein valor medius producti $z^0 \zeta^0 (x^0 \xi^0 + y^0 \eta^0 + z^0 \zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\varrho + 2)\mu^4$$

et ſic porro. Hinc per additionem prodit valor medius quadrati $(x^0 \xi^0 + y^0 \eta^0 + z^0 \zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2) + (\varrho\varrho + 2\varrho)\mu^4$$

VII. Omnibus tandem rite collectis eruitur

$$N = (\pi - 2\varrho)\nu^4 + (\pi\pi - \pi - 2\pi\varrho + 4\varrho + \varrho\varrho)\mu^4 +$$
$$(\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Ejemplo

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Derivadas sucesivas. Si $y = f(x)$, y', y'', y''', ..., $y^{(n)}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de y respecto de x. Si $y = f(x)$, y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}, ..., $y^{(n)}_{x^n}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de y respecto de x. Si $z = f(x, y)$, z'_x, z''_{xx}, z'''_{xxx}, ..., $z^{(n)}_{x^n}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de z respecto de x. Si $z = f(x, y)$, z'_y, z''_{yy}, z'''_{yyy}, ..., $z^{(n)}_{y^n}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de z respecto de y.

Derivadas parciales. Si $z = f(x, y)$, z'_x, z''_{xx}, z'''_{xxx}, ..., $z^{(n)}_{x^n}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de z respecto de x. Si $z = f(x, y)$, z'_y, z''_{yy}, z'''_{yyy}, ..., $z^{(n)}_{y^n}$ son las derivadas primera, segunda, tercera, ..., enésima de z respecto de y.

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi-\varrho)^2}\cdot(\varrho - \Sigma((a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2))$$

neceſſario iacet inter limites $-\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\varrho}$ et $\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\varrho}\cdot\frac{\varrho}{\pi}$ vel, ſi latiores praeferimus, inter hos $-\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\varrho}$ et $+\frac{\nu^4-3\mu^4}{\pi-\varrho}$, et proin erroris medii in valore ipſius $\mu\mu = \frac{M}{\pi-\varrho}$ metuendi quadratum inter limites $\frac{2\nu^4-4\mu^4}{\pi-\varrho}$ et $\frac{2\mu^4}{\pi-\varrho}$, ita vt praeciſionem quantamuis aſſequi liceat, ſi modo obſeruationum multitudo fuerit ſatis magna.

Valde memorabile eſt, in hypotheſi ea (art 9, III.), cui theoria quadratorum minimorum olim ſuperſtructa fuerat, illum terminum omnino excidere, et ſicuti, ad eruendum valorem approximatum erroris medii obſeruationum μ, in omnibus caſibus aggregatum $\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.} = M$ ita tractare oportet, ac ſi eſſet aggregatum $\pi - \varrho$ errorum fortuitorum, ita in illa hypotheſi etiam praeciſionem ipſam huius determinationis aequalem fieri ei, quam determinationi ex $\pi-\varrho$ erroribus veris tribuendam eſſe in art. 15. inuenimus.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google